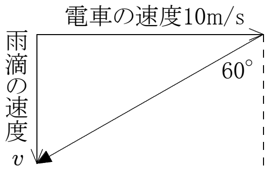
【問題解答】 第1講～第10講(力学)

【第1講】

(問題1-1)

右図より，

$$v=\frac{10\ \mathrm{m/s}}{1.7}=5.9\ \mathrm{m/s}$$



(問題1-2)

最高点は鉛直方向の速度が0になる。最高点に達したときの時間をt_1とすると，

$v_y=v_0\sin\theta-gt_1=0$ ， $t_1=\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$

よって，最高点の高さ$y_{\max}$は，

$$y_{\max}=v_0\sin\theta\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g}-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\theta}{g}\right)^2=\frac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g}$$

また，落下までの時間はt_1の2倍になるので，水平到達距離は，

$$x_{\max}=v_0\cos\theta\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g}=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

※斜方投射のx，yの式から，tを消去した式，

$$y=x\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x$$

は物体の軌道を表す方程式である。この式を平方完成すると，

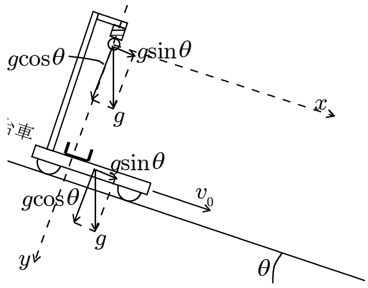
$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x-\frac{v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g}\right)^2+\frac{v_0\sin^2\theta}{2g}$$

となり，頂点$\left(\dfrac{v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g},\dfrac{v_0\sin^2\theta}{2g}\right)$を通るとが分かる。

(問題1-3)

(1) $\dfrac{1}{2}gt_1^2=h$ ， $t_1=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

(2) 台車と小球が受ける加速度は，共に鉛直下向きにgなので，x軸，y軸を図のように設定すると，小球が落下した瞬間からt_2秒後の台車と小球のx座標は共に



$$x=v_0t_2+\frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t_2^2$$

となり，小球はカップに入る。

(3) 小球のy方向の運動は加速度$g\cos\theta$の自由落下と考えることができる。落下までの時間は

$$y=\frac{1}{2}g\cos\theta\cdot t_2^2=h\ ,\ t_2=\sqrt{\frac{2h}{g\cos\theta}}$$

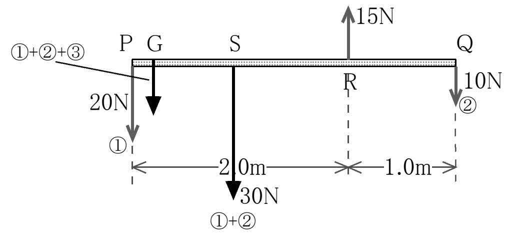
となる。(1)の結果と比べると，

$t_1<t_2$

となる。

【第2講】

(問題2-1)



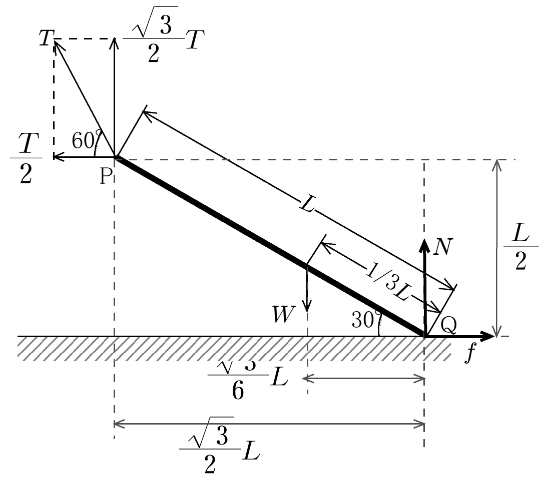
合力の大きさ，向きは上下方向の和から分かる。下向きを正とすると，

合力の大きさ：20N+10N-15N = 15N
　　向き　：下向き

重心は，①と②の重心Sを求め，このSと③の重心Gを求める。

・①と②の重心Sは，PQを1:2に内分 ⇒ PS=1.0m
・①+②と③の重心Gは，SRを2:1に外分⇒ **P点**

(問題2-2)



(1) 水平方向：$\dfrac{T}{2}=f$

鉛直方向：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}T+N=W$

(2) Q点まわりの力のモーメントのつり合い

$$\frac{T}{2}\cdot\frac{L}{2}+W\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}L=\frac{\sqrt{3}}{2}T\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}L$$

$$\Rightarrow\ \frac{T}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}W=\frac{3}{4}T$$

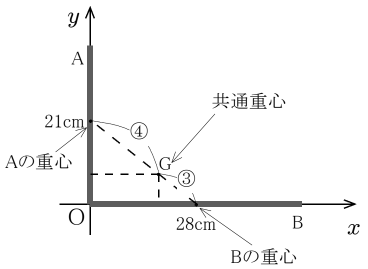
(3) (1)(2)より

$T=\dfrac{\sqrt{3}}{3}W$ ， $N=\dfrac{1}{2}W$ ， $f=\dfrac{\sqrt{3}}{6}W$

【第3講】

(問題3-1)

長さ42cmのAの重心と，長さ56cmのBの重心を結んだ線をAとBの質量の逆比で内分する点が共通重心Gである。



Aの重心：(x, y)=(0cm, 21cm}
Bの重心：(x, y)=(28cm, 0cm)

Gはこの2点を56:42=4:3で内分する点。よって，

G(x, y) = (16cm:9cm)

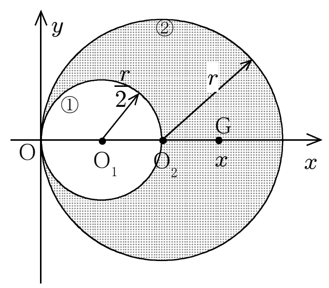
(問題3-2)

切り取った円板①と，残った板②の共通重心が，元の円板の重心に一致する。よって，O_2は，O_1とGを①と②の質量の逆比で内分する点となる。①，②の質量比は面積比に等しい(一様な板なので)

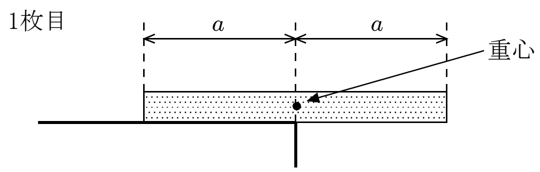
①の重心O_1のx座標　　　：$\dfrac{r}{2}$
②の重心Gのx座標　　　：x
元の円板の重心O_2のx座標：r

$$\frac{\pi}{4}r^2 : \left(\pi r^2 - \frac{\pi}{4}r^2\right) = x\text{-}r : \frac{r}{2}$$

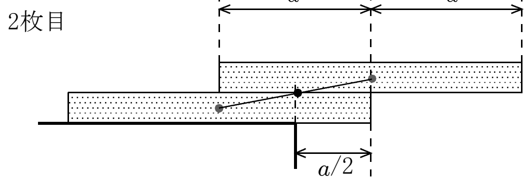
$$x = \frac{7}{6}r$$



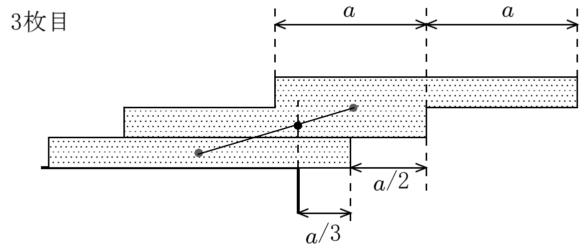
(問題3-3)



板の重心が机の上に載っていれば，板は落ちない。



2枚目の重心と，1枚目の重心の共通重心が，机の上に載っていればよい。



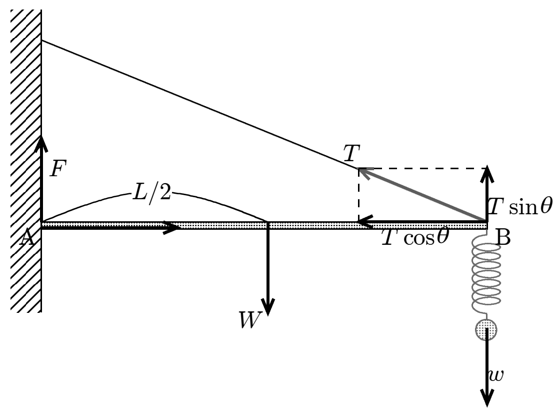
1,2枚目の共通重心と，3枚目の重心の共通重心が，机の上に載っていればよい。

以上より，10枚重ねると机の端からの距離は，

$$a+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}+\cdots\cdots+\frac{a}{10}$$

となる。
※理論上，無限に伸ばすことができる。

(問題3-4)



(1)
・A点まわりの力のモーメント
$N_1 = TL\sin\theta$　(反時計回り)
・B点まわりの力のモーメント
$N_2 = 0$
※B点は張力の作用点なので，力のモーメントは生じない

(2)B点まわりの力のモーメントのつり合いを考える。

(反時計回り)＝(時計回り)

$$TL\sin\theta = \frac{1}{2}WL + wL$$

$$T = \frac{W+2w}{2\sin\theta}$$

(3)棒が受ける力のつり合いを考える。

鉛直方向：$W+w = F + T\sin\theta$
水平方向：$N = T\cos\theta$
上式と(2)の結果より，

$$N = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}(W+2w)\ ,\ F = \frac{W}{2}$$

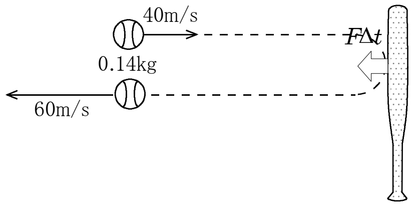
【第4講】

(問題4-1)

右を正として考える。(力積)＝(運動量の変化量)

$$(\text{力積}) = -0.14\ \mathrm{kg}\cdot 60\ \mathrm{m/s} - 0.14\ \mathrm{kg}\cdot 40\ \mathrm{m/s}$$
$$= -14\ \mathrm{N\cdot s}$$

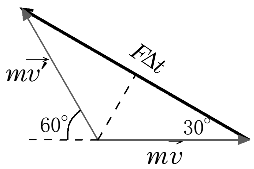
よって大きさは14 N･s（向きは左向き）



(問題4-2)

運動量の変化は図の通り。求める力積の大きさは，

$$(\text{力積}) = (0.15\ \mathrm{kg}\cdot 40\ \mathrm{m/s}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 10\ \mathrm{Ns}\cdot$$

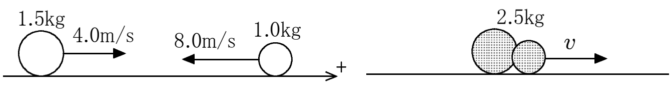


(問題4-3)

右方向を正とする。求める速さを v とすると，運動量の保存則より，

$$1.5\ \mathrm{kg}\cdot 4.0\ \mathrm{m/s} - 1.0\ \mathrm{kg}\cdot 8.0\ \mathrm{m/s} = 2.5\ \mathrm{kg}$$
$$v = -0.80\ \mathrm{m/s}$$

よって，左向きに0.80m/s



(問題4-4)

最初のロケットの質量を M，放出した燃料の質量を m，燃料の放出した速さ v とする。

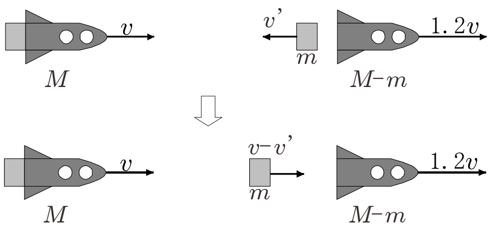
燃料の実際の速度は，放出前に持っていた速度v から放出速度v' を引いた速度になる。

運動量保存の法則より，

$$Mv = m(v - v') + (\mathrm{M} - m)\cdot 1.2v$$

それぞれの値に必要な数値を入れて，

$$v = 2.2 \times 10^4\ \mathrm{m/s}$$



静止系から見た場合

【第5講】

(問題5-1)

落下する直前の物体の速さは，力学的エネルギー保存の法則より，

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad v = \sqrt{2gh}$$

はね返った直後の速さを v' とすると，上昇する高さが h' だから，

$$mgh' = \frac{1}{2}mv'^2 \quad , \quad v = \sqrt{2gh'}$$

よって，

$$e = \frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2gh'}}{\sqrt{2gh}} \quad \text{となるので，} \quad \frac{h'}{h} = e^2$$

(問題5-2)

(1)運動量保存の法則より

$$mv_1 = mv_1' + mv_2' \quad \cdots\cdots ①$$

反発係数より，

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より，

$$v_1' = \frac{1-e}{2}v_1 \quad , \quad v_2' = \frac{1+e}{2}v_1$$

(2)衝突前の運動エネルギーの合計 E は，

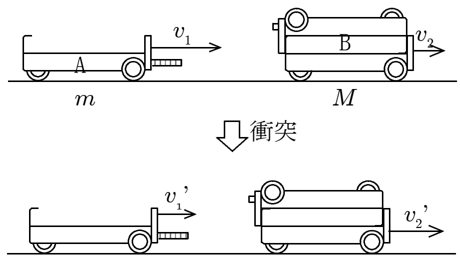
$$E = \frac{1}{2}mv_1^2$$

衝突後の運動エネルギーの合計 E' は，

$$E' = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$$
$$= \frac{1}{8}m(1-e)^2v_1^2 + \frac{1}{8}m(1+e)^2v_1^2$$
$$= \frac{1}{4}m(1+e^2)v_1^2$$

よって，衝突前後のエネルギーの差 ΔE は

$$\Delta E = E' - E = \frac{1}{4}m(1+e^2)v_1^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$
$$= \frac{1}{4}m(e^2-1)v_1^2$$



このような場合，

$$v_1' = \frac{mv_1 + Mv_2}{m+M} - e\frac{M(v_1 - v_2)}{m+M}$$

$$v_2' = \frac{mv_1 + Mv_2}{m+M} + e\frac{m(v_1 - v_2)}{m+M}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(e^2 - 1)(v_1 - v_2)^2$$

(問題5-3)

衝突した場所を座標原点と考えると，衝突前のA，Bの重心座標は，

$$(x,y)=\left(\frac{m_a x_1+m_b x_2}{m_a+m_b},\frac{m_a y_1+m_b y_2}{m_a+m_b}\right)$$

一方，衝突後の重心の座標は，

$$(x',y')=\left(\frac{m_a x_1'+m_b x_2'}{m_a+m_b},\frac{m_a y_1'+m_b y_2'}{m_a+m_b}\right)$$

となる。重心の速度は，位置の時間微分で表すことができる。

・衝突前の x 方向の速度 v_{xG}

$$v_{xG}=\frac{d}{dt}\frac{m_a x_1+m_b x_2}{m_a+m_b}=\frac{m_a\frac{d}{dt}x_1+m_b\frac{d}{dt}x_2}{m_a+m_b}$$
$$=\frac{m_a v_{ax}+m_b v_{bx}}{m_a+m_b}$$

・衝突前の y 方向の速度 v_{yG}

$$v_{yG}=\frac{m_a v_{ay}+m_b v_{by}}{m_a+m_b}$$

・衝突後の y 方向の速度 v_{yG}'

$$v_{xG}'=\frac{m_a v_{ay}'+m_b v_{by}'}{m_a+m_b}$$

・衝突後の y 方向の速度 v_{yG}

$$v_{yG}'=\frac{m_a v_{ay}'+m_b v_{by}'}{m_a+m_b}$$

運動量保存則より，

$$m_a v_{ax}+m_b v_{bx}=m_a v_{ax}'+m_b v_{bx}'$$
$$m_a v_{ay}+m_b v_{by}=m_a v_{ay}'+m_b v_{by}'$$

なので，

$$v_{xG}=v_{xG}'\quad,\quad v_{yG}=v_{yG}'$$

となる。

(問題5-4)

A，Bの質量を m，衝突後のAの速さを v_a，Bの速さを v_b とする。運動量保存の法則より，

・水平方向

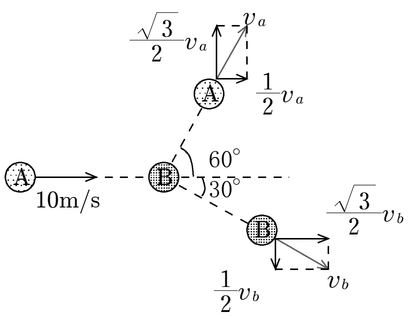
$$10\ \mathrm{m/s}\times m=\frac{1}{2}mv_a+\frac{\sqrt{3}}{2}mv_b$$

・垂直方向

$$\frac{\sqrt{3}}{2}mv_a-\frac{1}{2}mv_b=0$$

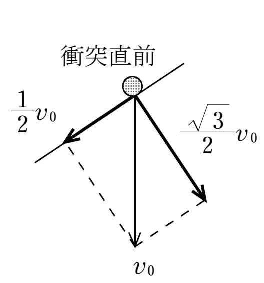
上式を解いて，

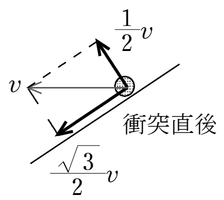
$$v_a=5.0\ \mathrm{m/s}\quad,\quad v_a=8.5\ \mathrm{m/s}$$



(問題5-5)

斜面はなめらかなので，斜面から受ける力積は，斜面に垂直な方向のみになる。衝突前後の速度を，斜面に垂直な方向と，斜面に平行な方向に分解して考える。





・斜面に垂直方向

反発係数が e なので，

$$e=\left|\frac{\frac{1}{2}v}{\frac{\sqrt{3}}{2}v_0}\right|=\left|\frac{v}{\sqrt{3}\,v_0}\right|$$

・斜面に平行な方向

衝突前後で速度は変化しない

$$\frac{1}{2}v_0=\frac{\sqrt{3}}{2}v$$

以上より，

$$v=\frac{v_0}{\sqrt{3}}\quad,\quad v=\frac{1}{3}$$

【第6講】

(問題6-1)

周期 $T=\dfrac{10\ \mathrm{s}}{2.0}=5.0\ \mathrm{s}$

回転数 $f=\dfrac{1}{T}=0.20\ \mathrm{Hz}$

角速度 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi f=1.25\cancel{6}=1.3\ \mathrm{rad/s}$

速さ $v=r\omega=3.0\ \mathrm{m}\times1.25\ \mathrm{rad/s}=3.8\ \mathrm{m/s}$

(問題6-2)

(1)求める加速度を a とする。車の速さ v=10m/sなので，

$$a=r\omega^2=r\left(\frac{v}{r}\right)^2=\frac{v^2}{r}=\frac{(10\ \mathrm{m/s})^2}{1.0\times10^2\ \mathrm{m}}=1.0\ \mathrm{m/s^2}$$

求める向心力の大きさを F とすると，

$$F=ma=1.0\times10^3\ \mathrm{kg}\times1.0\ \mathrm{m/s^2}=1.0\times10^3\ \mathrm{N}$$

(2)速さ v が2倍になると，加速度は4倍になる。よって，向心力の大きさも4倍になる。

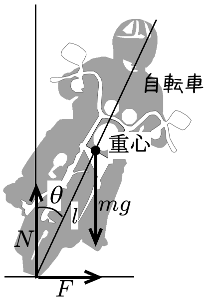
> 車が曲がる場合の向心力は，タイヤと路面の摩擦力なので，その最大値は「最大摩擦力」である。よって，静止摩擦係数と垂直抗力(車の質量)及び，回転半径によって，曲がることができる最大の速さは決まってくる。

(問題6-3)

プリント問題解答

自転車の回転半径を r，速さを v とすると，向心力 F は，

$$F = m\frac{v^2}{r}$$



となる。向心力は自転車と路面との静止摩擦力なので，その最大値(最大摩擦力)は，静止摩擦係数を μ, 垂直抗力を N とすると，とすると，

$$F = \mu N = \mu mg$$

となる。よって，最小回転半径 r_mは，

$$\mu mg = m\frac{v^2}{r_\mathrm{m}}$$

$$r_\mathrm{m} = \frac{\cancel{m}v^2}{\mu \cancel{m}g} = \frac{(4.0\ \mathrm{m/s})^2}{0.50 \cdot 9.8\ \mathrm{m/s^2}} = 3.3\ \mathrm{m}$$

また，　重心まわりの力のモーメントのつり合いより，

$$F\,l\sin\theta = N\,l\cos\theta$$

$$F = N\tan\theta = mg\tan\theta$$

なので，

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} = \frac{\mu mg}{mg} = 0.50$$

$(\theta = \tan^{-1}0.50 \fallingdotseq 27^\circ)$

【第7講】

(問題7-1)

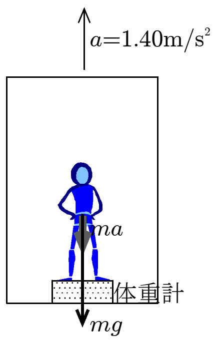
非慣性系(エレベーター内から見た場合)

エレベーターが加速度 a で上向きに運動している場合，質量 m のエレベーター内の人は，下向きに $mg+ma$ の力を受ける。よって，体重計の目盛りは，

$$\frac{mg + ma}{g} = \frac{60\ \mathrm{kg}\cdot(9.80\ \mathrm{m/s^2}+1.40\ \mathrm{m/s^2})}{9.80\ \mathrm{m/s^2}}$$

$$= 68.6\ \mathrm{kg}$$

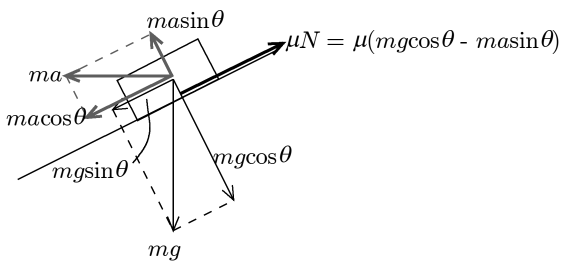
エレベーター内の人にとっては，重力加速度が，11.2m/s²になったように感じる。
(重力が約14%増加した様に感じる)



(問題7-2)

台の上の系(非慣性系)で考える。

小物体が斜面を滑り出さない最大の加速度を a とすると，小物体が受ける力は下図の通り。



小物体が受ける最大摩擦力は，

$$\mu(mg\cos\theta - ma\sin\theta)$$

なので，この力と斜面下向きの力が等しいときが，a の最大値となる。よって，

$$ma\cos\theta + mg\sin\theta = \mu(mg\cos\theta - ma\sin\theta)$$

$$a = \frac{\mu\cos\theta - \sin\theta}{\mu\sin\theta + \cos\theta}g$$

(問題7-3)

(1)角速度 ω は，

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

よって，慣性力(遠心力)の大きさ F は，

$$F = mR\omega^2 = 4\pi^2 mn^2 R$$

(2)壁との間の静止摩擦力の最大値(最大摩擦力)が重力より大きければよい。壁から受ける垂直抗力は(1)で求めた遠心力に等しくなるので，

$$\mu F > mg$$

$$\mu F > mg$$

$$\mu\cdot 4\pi^2 mn^2 R > mg$$

$$n > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\mu R}}$$

【第8講】

(問題8-1)

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{2}\times 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}}$$　よって　$\frac{l}{4}$

(問題8-2)

$$l = \frac{T^2}{4\pi^2}g = 0.24\cancel{8}4\ \mathrm{m} = 0.25\ \mathrm{m}$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{g}{6}}} = \sqrt{6}\,T = 2.4T$$　よって2.4倍

【第9講】

(問題9-1)

1.0m離れている2物体間に生じる万有引力の大きさ F は，

$$F = 6.67\times 10^{-11}\times\frac{50\times 50}{(1.0)^2} = 1.7\times 10^{-7}\ [\mathrm{N}]$$

よって，この力によって質量50kgの物体に生じる加速度の大きさ a は，

$$a = \frac{1.7\times 10^{-7}}{50} = 3.4\times 10^{-9}\ [\mathrm{m/s^2}]$$

万有引力は，距離の2乗に反比例しているので，距離が近づくと力は大きくなるため，加速度も増加していく。しかし，その絶対量はわずかであるため，ここでは加速度が一定であると仮定して求めてみる。

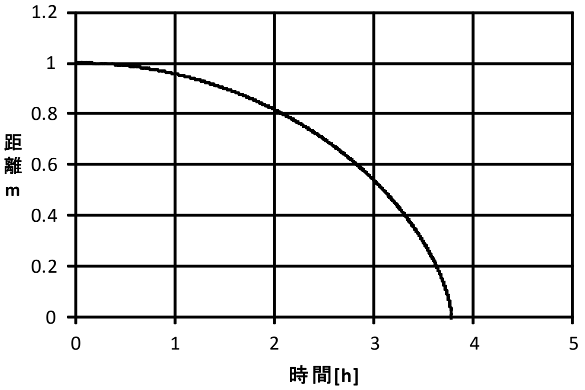
2物体を質点であると考えると，互いに0.50m近づけば2物体はぶつかる。よって，上記の加速度で0.50mの距離を進むまでに要する時間を求める。

$$0.50 = \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{3.4\times 10^{-9}}} = 1.7\times 10^4\ [\mathrm{s}] \fallingdotseq 4.7\ [\mathrm{h}]$$

なお，万有引力の大きさの変化を考慮した場合，

2物体の距離の時間変化は下のグラフの通りになる。



(問題9-2)

地球-太陽間の万有引力を F とすると，この力が向心力になるので，

$$F=G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$$

よって，

$$v=\sqrt{G\frac{M}{r}}=\sqrt{6.7\times10^{-11}\times\frac{2.0\times10^{30}}{1.5\times10^{11}}}$$

$$=3.0\times10^4\ [\mathrm{m/s}]$$

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\sqrt{\frac{4\pi r^3}{GM}}$$

$$=\sqrt{\frac{4\times3.1\times(1.5\times10^{11})^3}{6.7\times10^{-11}\times2.0\times10^{30}}}=3.1\times10^7\ [\mathrm{s}]\ \fallingdotseq 1年$$

【第10講】

(問題10-1)

地表面を高さの基準(h=0)とすると，地表面及び，高さ h における重力によるエネルギーは，

地表面：$U_1=0$　　h：$U_2=mgh$

なので，位置エネルギーの差 ΔU は，

$$\Delta U=mgh$$

となる。一方，万有引力による位置エネルギーは，

地表面：$U_1=-G\dfrac{Mm}{R}$

高さ h：$U_2=-G\dfrac{Mm}{(R+h)}$

なので，その差 ΔU は，

$$\Delta U'=-G\frac{Mm}{(R+h)}-\left(-G\frac{Mm}{R}\right)$$

である。この $\Delta U'$ が ΔU に等しければよい。

$$\Delta U'=-G\frac{Mm}{(R+h)}+G\frac{Mm}{R}$$

$$=GMm\left\{\frac{1}{R}-\frac{1}{(R+h)}\right\}$$

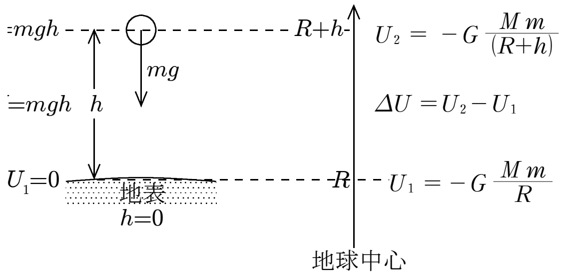
$$=GMm\left\{\frac{1}{R}-\frac{1}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)}\right\}$$

$1+\dfrac{h}{R}\ll1$ なので，$\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^{-1}=1-\dfrac{h}{R}$。よって，

$$\Delta U'=GMm\left\{\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)\right\}=GMm\frac{h}{R^2}$$

$GM=gR^2$ なので，

$$\Delta U'=gR^2m\frac{h}{R^2}=mgh$$



※別解

$$\frac{1}{2}mv^2=GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$

において，

$$\frac{1}{2}mv^2=GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$

$$=GMm\left\{\frac{1}{R}-\frac{1}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)}\right\}$$

$1+\dfrac{h}{R}\ll1$ なので，$\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^{-1}=1-\dfrac{h}{R}$ よって，

$$\frac{1}{2}mv^2=GMm\left\{\frac{1}{R}-\frac{1}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)}\right\}$$

$$=GMm\left\{\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)\right\}$$

$$=GMm\frac{h}{R^2}$$

さらに，$GM=gR^2$ なので，

$$\frac{1}{2}mv^2=GMm\frac{h}{R^2}=gR^2m\frac{h}{R^2}=mgh$$

(問題10-2)

力学的エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}mv^2=-G\frac{Mm}{R+h}-\left(-\frac{Mm}{R}\right)$$

$$=GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$

$$v^2=2\mathrm{GM}\left\{\frac{h}{R(R+h)}\right\}$$

$$v=\sqrt{2\mathrm{GM}\left\{\frac{h}{R(R+h)}\right\}}$$

また $R\gg h$ ならば，上式の分子分母を R で割り，

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{h}{R}}}\fallingdotseq\sqrt{2gh}\quad\left(\because\frac{h}{R}\fallingdotseq0\right)$$

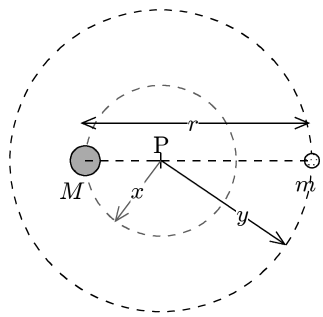
(問題10-3)(問題10-4)(問題10-5)省略

(問題10-6)

重心Pの位置は，2つの天体を結んだ距離を質量比で内分する点である。質量 m の天体の軌道半径を x，

$$x=\frac{M}{M+m}r$$

となる。よって，向心力の大きさは，



$$F=mx\omega^2=mx\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{Mm}{M+m}r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$