

第10講 万有引力による位置エネルギー(教P. 84~87)

A 万有引力による位置エネルギー

地表面から高さ h にある質量 m の物体がもつ位置エネルギーは $U=mgh$

これらは、 $h \ll R$ ならよいが、 $h \approx R$ になってくると問題有り

万有引力: $F=G \frac{Mm}{r^2}$ …… 距離とともに力が変化

質量 m の物体を距離 r から r_0 まで外力で運ぶ
 ⇒ 外力にされた仕事 W が位置エネルギーの増加量 ΔU になる
 F-r グラフの囲まれた部分の面積

$W = \Delta U =$

位置エネルギーの基準を無限遠 ($r_0 = \infty$) とすると、 r から無限遠まで運ぶために外力がする仕事は、

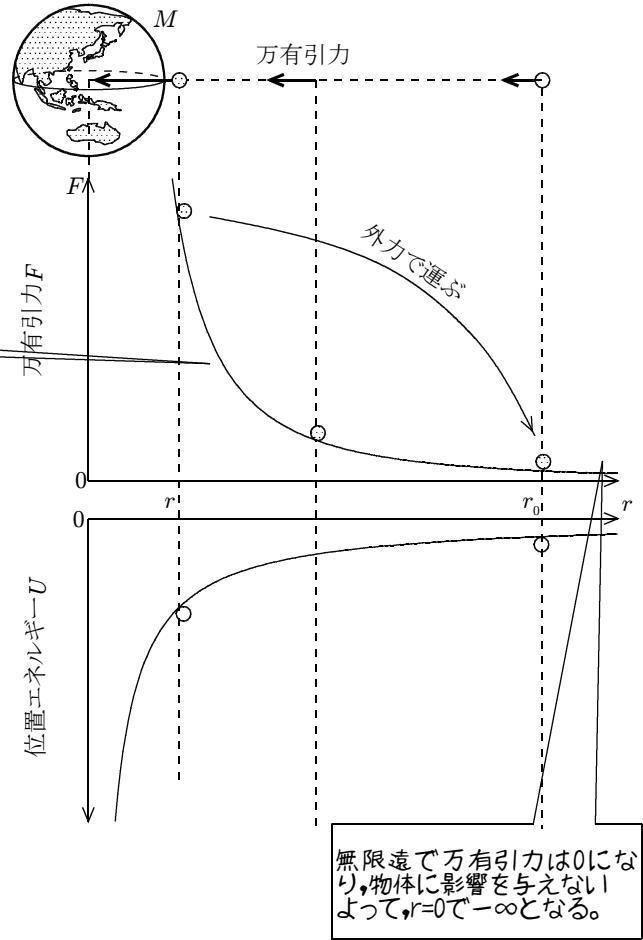
$W = \Delta U =$

この仕事が、 r から無限遠までの位置エネルギーの増加量 ΔU になる。無限遠で位置エネルギー U は 0J になるので、 r における位置エネルギーは、

$U(r) = U(\infty) - (\text{外力の仕事}) = 0 - W$

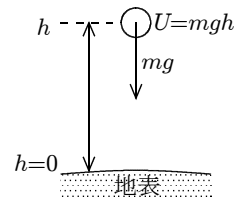
よって、位置 r における位置エネルギー $U(r)$ は

【万有引力による位置エネルギー】



(問題10-1)

地表付近での高さ h における重力による位置エネルギー mgh を、万有引力の位置エネルギーの式から導出せよ。ただし、 $x \ll 1$ のとき $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ (α は実数) である。

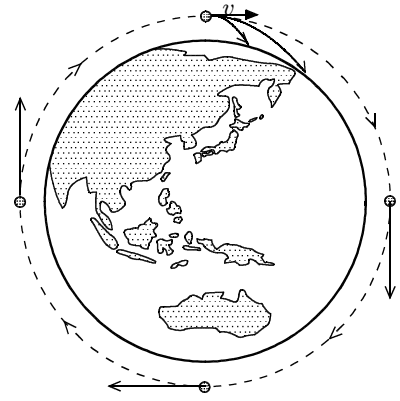


(問題10-2)

地上からの高さ h の位置から、物体を自由落下させたとき、地上に衝突する直前の速さ v を、万有引力の位置エネルギーより求めなさい。また、 h が地球半径 R に対して十分小さいとき、 $v = \sqrt{2gh}$ になることを示しなさい。

B 人工衛星の運動

- ・高さ h から、速度 v で水平に物体を投射すると、物体は放物線を描いて落下。投げた速度 v を大きくすると、より遠くへ落下する。
- ・おもいっきり速く投げると、永遠に落下しながら遠くへ飛ぶようになる \Rightarrow 地球の周りを回る(このときの速度を「第1宇宙速度」という)



(問題10-3)

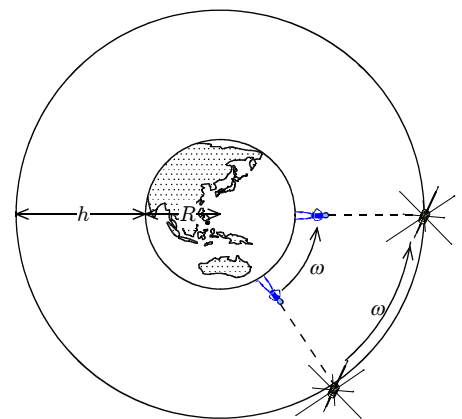
地球半径をぎりぎりに回る人工衛星の速度 v_0 を求めなさい。ただし、重力加速度の大きさを g 、地球半径を R 、万有引力定数を G とする。また、 $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 、 $R=6.4 \times 10^3 \text{ km}$ として、その周期を求めなさい。(教P.84 例題2 参照)

(問題10-4)

人工衛星を打ち上げ、地球の重力圏を離脱して、太陽のまわりを回る軌道に載せたい。人工衛星に必要な速度(第2宇宙速度)はいくらか。地球大気による摩擦などは一切考慮しない。(教P.87 例題4 参照)

(問題10-5)

赤道上空を地球の自転周期 T と同じ周期で回っている人工衛星(静止衛星)の高さ h を求めなさい。ただし、重力加速度の大きさを g 、地球半径を R とする。(教P.84 例題3 参照)



(問題10-6)

質量が M と m の天体が、距離 r を離れて重心Pの周りを周期 T で等速円運動しているとする。質量が m の天体の軌道半径はいくらか。また、向心力の大きさはいくらか。